Calcul de la rotondité de la Terre

jgricourt

8 septembre 2019
version 1.0

Table des matières

1 Préambule

L'idée de me pencher sur ce calcul m'est venue d'une discussion avec Toutiet sur le forum Webastro au sujet de la faisabilité de voir la rotondité de la Terre depuis le sol. Toutiet parlait alors d'un article qu'il avait publié dans le magazine l'Astronomie No 58 paru en 2013 au sujet de sa méthode pour mesurer précisément la rotondité Terrestre à l'aide d'un instrument de sa conception le "Géosphéromètre".

Afin de savoir si la rotondité de la terre peut être évaluée visuellement à proximité du sol il faut d'abord en déterminer sa dimension angulaire.

Imaginons un lunette d'observation capable de pivoter autour d'un axe fixe perpendiculaire au plan de rotation, le fameux "Géosphéromètre" :o) et que l'on réalise les opérations suivantes :

1. on vise la ligne d'horizon à l'aide de la lunette
2. on incline légèrement le plan de rotation de la lunette vers le bas (d'un angle γ sur le schéma)
3. puis on tourne lentement la lunette vers la droite jusqu'à toucher l'horizon à nouveau.
4. on mesure l'angle α entre les 2 positions.

Lorsqu'on tourne à nouveau la lunette vers la gauche on constate que l'horizon se met à monter légèrement par rapport au centre du réticule pour ensuite reprendre sa position initiale [1]

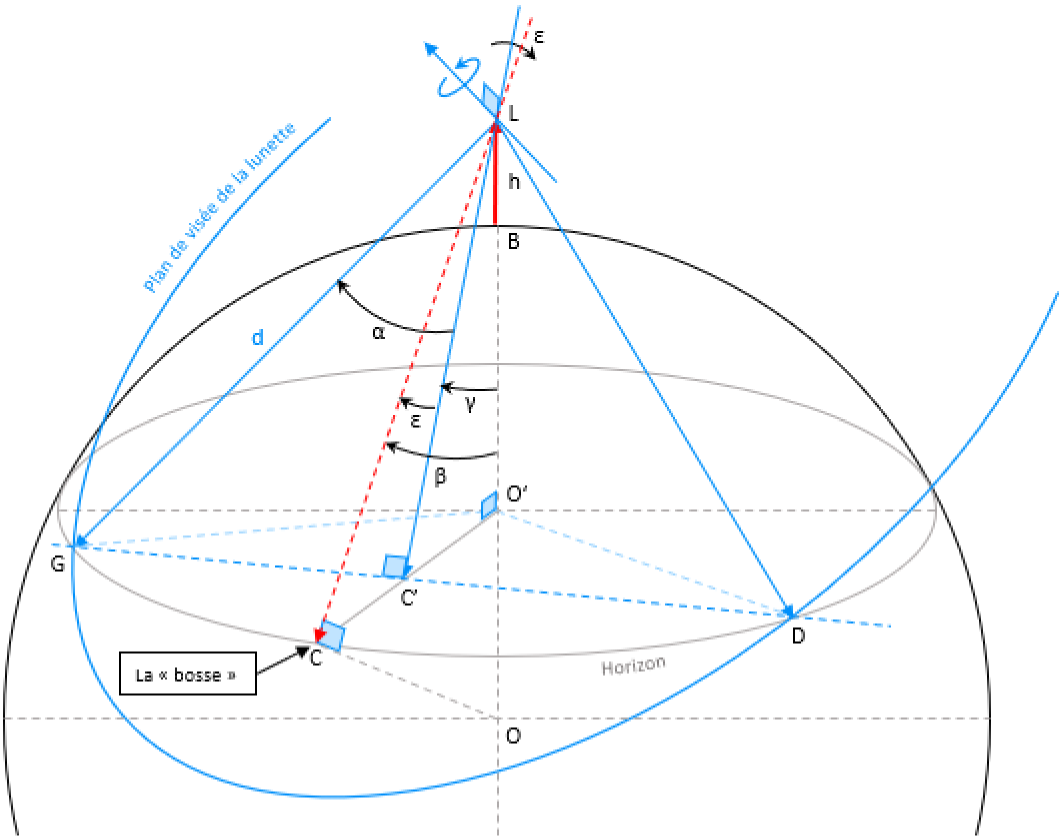
Cette observation est possible d'abord parce que la lunette est à une certaine altitude h par rapport au sol ce qui lui permet effectivement d'observer cette "bosse" qui représente la rotondité de la Terre.

Ensuite un oculaire doté d'un réticule permet de mesurer angulairement cette montée de l'horizon dans le champ de vision de la lunette.

Pourquoi alors ne fait-on pas cette même observation à l'oeil nu ? Lorsque qu'on tourne la lunette celle ci est contrainte de rester sur un plan dont l'axe est différent de la verticalité du lieu alors que nos yeux ne font que suivre la ligne d'horizon et voient donc en permanence la "bosse". Pour véritablement voir cette "bosse" il faudrait que celle ci soit suffisamment grande en dimension angulaire sur un champ de 60° au moins. Plus on observera haut en altitude plus la rotondité sera perceptible. Celle ci devient évidente dans le champ de vision aux alentours de 20km d'altitude d'après des témoignages de pilotes de U2 dans les années 60s.

1. Je passe quand même très vite les détails de l'usage de l'instrument, Toutiet saura mieux l'expliquer que moi ...

Le tracé géométrique



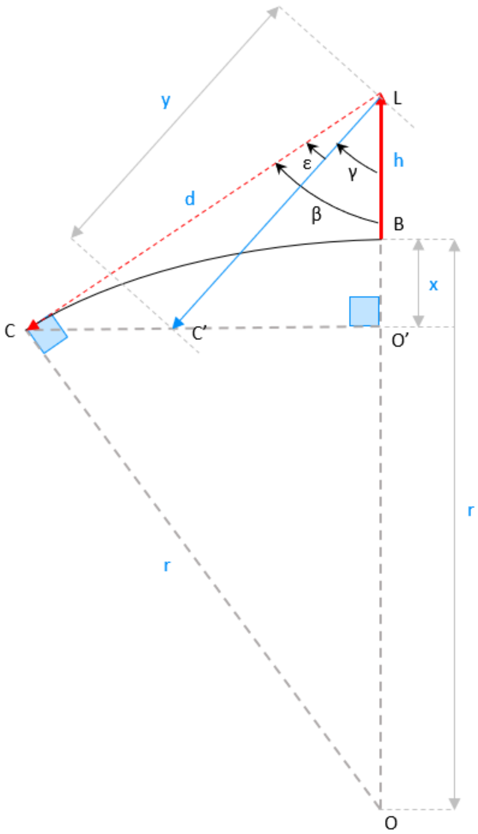
2 Les calculs

Un observateur L est situé à une hauteur h du sol observe la ligne d'horizon située à une distance d. Par définition au delà de cette distance plus aucun objet situé à proximité du sol ne sera donc visible, la limite est le point où la ligne de visée est exactement tangente à la surface de la Terre.

Le plan de rotation de la lunette intersecte la plan de l'horizon aux points G et D. La lunette en rotation sur ce plan pointe en C' à mi-chemin alors que le regard de l'observateur (oeil nu) pointe au delà en C. La dimension angulaire de la "bosse" est donc représentée par l'angle $\widehat{CLC'} = \epsilon$.

Récapitulatif des données :

— d : la distance de l'horizon
— r : la rayon terrestre, vaut 6371 km environ
— h : l'altitude de l'observateur
— ϵ : la dimension angulaire de la “bosse”



2.1 Calcul de la distance de l'horizon d

La distance de l'horizon d se calcul à partir du triangle rectangle (LCO).

Selon le théorème de Pythagore :

$$
\begin{aligned}
d^2 + r^2 &= (r+h)^2 \\
d^2 &= (r+h)^2 - r^2 \\
d^2 &= r^2 + 2rh + h^2 - r^2 \\
d^2 &= 2rh + h^2 \\
&\boxed{d = \sqrt{2rh + h^2}}
\end{aligned}
$$

2.2 Calcul de la hauteur $[O'B] = x$

Le segment $[O'C]$ fait parti des triangles rectangles (O'CL) et (O'CO) donc il est possible d'appliquer le théorème de Pythagore dans ces 2 triangles rectangles.

Pour le triangle (O'CL)

$$
\begin{aligned}
[O'C]^2 + (x+h)^2 &= d^2 \\
[O'C]^2 &= d^2 - (x+h)^2
\end{aligned}
$$

Pour le triangle (O'CO)

$$\begin{aligned}
[O'C]^2 + [OO']^2 &= r^2 \\
[O'C]^2 + (r-x)^2 &= r^2 \\
[O'C]^2 &= r^2 - (r-x)^2
\end{aligned}$$

Par conséquent en réunissant les 2 équations on obtient :

$$\begin{aligned}
d^2 - (x+h)^2 &= r^2 - (r-x)^2 \\
d^2 - x^2 - 2xh - h^2 &= r^2 - r^2 + 2rx - x^2 \\
d^2 - 2xh - h^2 &= 2rx \\
2x(r+h) &= d^2 - h^2 \\
&\boxed{x = \frac{d^2 - h^2}{2(r+h)}}
\end{aligned}$$

2.3 Calcul des angles β, γ

L'angle α fait partie du triangle rectangle (C'GL) :

$$\begin{aligned}
cos\alpha &= y/d \\
&\boxed{y = d \times cos\alpha}
\end{aligned}$$

L'angle β fait partie du triangle rectangle (O'LC) :

$$\begin{aligned}
&cos\beta = [O'L]/d \\
&\boxed{cos\beta = (x+h)/d}
\end{aligned}$$

L'angle γ fait partie du triangle rectangle (O'LC') :

$$\begin{aligned}
&cos\gamma = [O'L]/y \\
&cos\gamma = (x+h)/y \quad \text{remplacer y vu plus haut} \\
&\boxed{cos\gamma = (x+h)/(d \times cos\alpha)}
\end{aligned}$$

L'angle ϵ est bien évidement égale à $\beta - \gamma$

$$\boxed{\epsilon = \beta - \gamma}$$

Donc connaissant la hauteur h de l'observateur ainsi que l'angle α, Toutiet fixe α à 45° sur sa machine, on peut déterminer la hauteur de l'horizon ϵ.

Note : lorsqu'on fixe $\alpha = 45°$ comme dans l'article de Toutiet on arrive à une simplification, les côtés adjacents du triangle rectangle (LGC') valent alors tout deux : $d/\sqrt{2}$.

3 Cas concrets

Voici quelques valeurs de la dimension angulaire calculée (implémentation sous Excel) :

alpha	**45**	**degrés**									
r	**6371**	**km**									
	10 mètres	100 mètres	200 mètres	500 mètres		Mont Blanc	L'Everest				ISS
h (km)	**0.01**	**0.1**	**0.2**	**0.5**	**1**	**5**	**10**	**20**	**50**	**100**	**500**
epsilon (degrés)	**0.04**	**0.13**	**0.19**	**0.30**	**0.42**	**0.94**	**1.33**	**1.88**	**2.99**	**4.25**	**9.99**
d	11.29	35.70	50.48	79.82	112.88	252.46	357.10	505.21	799.75	1133.23	2573.13
x	0.01	0.10	0.20	0.50	1.00	5.00	9.98	19.94	49.61	98.45	463.62
y	7.98	25.24	35.70	56.44	79.82	178.51	252.51	357.24	565.51	801.31	1819.48
beta	89.90	89.68	89.55	89.28	88.98	87.73	86.79	85.47	82.85	79.91	68.01
gamma	89.86	89.55	89.36	88.98	88.56	86.79	85.46	83.58	79.85	75.66	58.02

On constate que cela reste de très petits angles jusqu'à 100km d'altitude, il faudrait donc quasiment franchir la frontière de l'atmosphère terrestre pour vraiment voir et non deviner (ou imaginer) la rotondité de la Terre.

4 Conclusions

La mesure nécessite un lieu terrestre sur un sol stable où l'on peut contempler un vaste horizon dégagé sur au moins sur 2x 45° et selon notre exemple et il n'y a guère qu'en bord de mer que cela est possible.

Limitations :

— la mesure est affectée par la réfraction atmosphérique qui relève les images de 0.5° au dessus de l'horizon environ (selon le BDL) alors que les angles mesurés sont de l'ordre de 0.1°

— des vagues de chaleur localisées qui sont totalement imprévisibles et instables peuvent affecter aussi la mesure (effet mirage)

— en pratique l'horizon n'est pas vraiment rectiligne car l'agitation de la mer rend le pointage au mieux aléatoire si l'on est pas suffisamment haut en altitude.