La Parabole

jgricourt

12 janvier 2017

1 Définition

Soient (d) une droite appelée “directrice” et F un point n’appartenant pas à (d) appelé “foyer”. La parabole de directrice (d) et de foyer F est constituée de l’ensemble des points M à égale distance du foyer F et de la “directrice”.

Soit M' la projection orthogonale de M sur la directrice, en conséquence chaque points M de la parabole doivent vérifier l’égalité suivante :

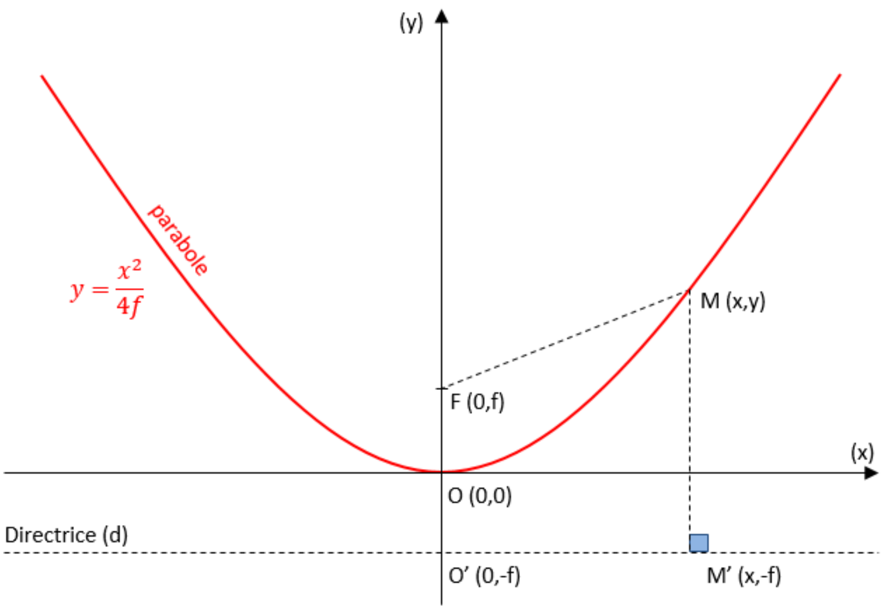
$$\boxed{MF = MM'} \tag{1}$$

2 Equation de la parabole

Nous plaçons le point O origine du repère orthonormé (O,x,y) sur la parabole alors il vérifie également l’égalité suivante :

$$OF = OO' = f$$

“La parabole”



Écrivons le coordonnées paramétriques des points du schéma :

$$M = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad M' = \begin{bmatrix} x \\ -f \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} 0 \\ f \end{bmatrix}$$

Calculons MF et MM’ :

$$MF = ||\overrightarrow{MF}|| = \sqrt{(0-x)^2 + (f-y)^2} = \sqrt{x^2 + (f-y)^2}$$
$$MM' = ||\overrightarrow{MM'}|| = \sqrt{(x-x)^2 + (-f-y)^2} = \sqrt{(f+y)^2}$$

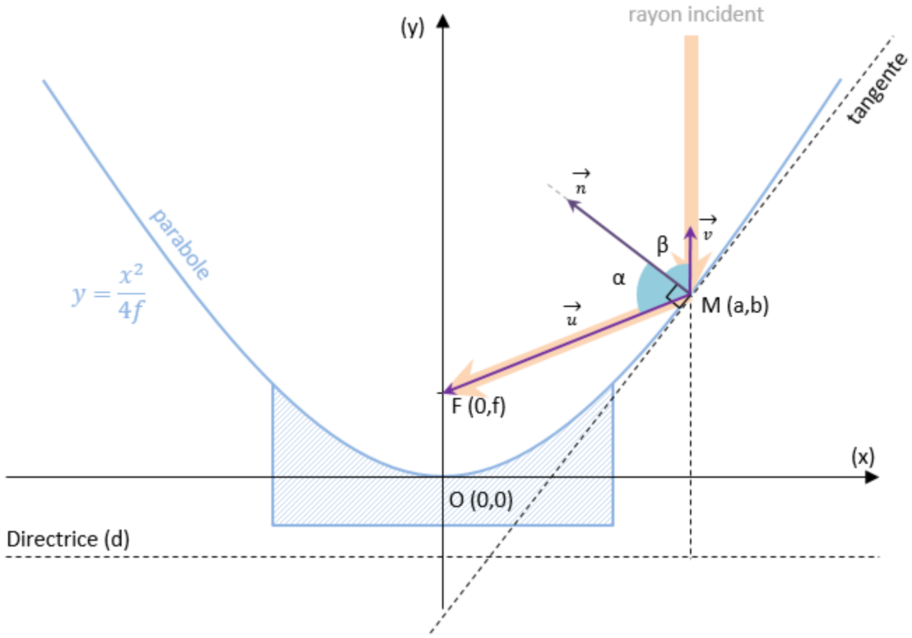
Si l'on reprend la définition de la parabole 1 :

$$\begin{aligned} MF &= MM' \\ ||\overrightarrow{MF}|| &= ||\overrightarrow{MM'}|| \\ \sqrt{x^2 + (f-y)^2} &= \sqrt{(f+y)^2} \\ x^2 + (f-y)^2 &= (f+y)^2 \\ x^2 + f^2 - 2fy + y^2 &= f^2 + 2fy + y^2 \\ x^2 - 2fy &= 2fy \\ \boxed{y = \frac{x^2}{4f}} \end{aligned} \tag{2}$$

3 Propriété optique de la parabole

Un miroir ayant la forme d'une parabole à la propriété de renvoyer sur son foyer tous les rayons incidents perpendiculaires à sa directrice [1]. Cette propriété permet de concentrer en un point image (le foyer) des rayons incidents parallèles à son axe tout comme le ferai une lentille convexe.

"Propriétés optiques"



Considérons le point M sur la parabole ainsi que la droite tangente à la parabole au point M d'équation $y = mx + p$. Le vecteur $\vec{v}$ est parallèles au rayon incident et le vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{MF}$ est parallèle au rayon réfléchi au rayon réfléchi. Le vecteur normal $\vec{n}$ est le vecteur perpendiculaire à la tangente.

1. Propriété de stigmatisme du miroir parabolique pour les sources situées à l'infini.

La dérivée $\dot{y} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ de l'équation de la parabole s'écrit :

$$y = \frac{x^2}{4f}$$
$$\dot{y} = \frac{2x}{4f}$$
$$\dot{y} = \frac{x}{2f}$$

Au point M(a,b) la dérivée vaut :

$$\dot{y} = \frac{a}{2f}$$

On en déduit la pente m de la tangente [2] :

$$m = \frac{a}{2f}$$

Par définition la tangente passe par le point M(a,b) donc on peut écrire aussi :

$$y = mx + p$$
$$b = \frac{a}{2f}a + p$$
$$p = b - \frac{a^2}{2f}$$

Finalement l'équation de la tangente s'écrit :

$$y = mx + p$$
$$\boxed{y = \frac{a}{2f}x + b - \frac{a^2}{2f}}$$

Écrivons le coordonnées des vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{n}$ du schéma :

$$\vec{u} = \overrightarrow{MF} = \begin{pmatrix} 0-a \\ f-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a \\ f - \frac{a^2}{4f} \end{pmatrix}$$
$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -m \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{a}{2f} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Rappel :

Produit scalaire de 2 vecteurs : $\vec{u}.\vec{n} = u_1 n_1 + u_2 n_2$

Norme d'un vecteur : $||\vec{u}|| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$

2. m = coefficient directeur de la droite

Calculons les normes des vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{n}$:

$$||\overrightarrow{u}|| = \sqrt{a^2 + (f - \frac{a^2}{4f})^2}$$
$$||\overrightarrow{v}|| = 1$$
$$||\overrightarrow{n}|| = \sqrt{1 + \frac{a^2}{4f^2}}$$

Calculons l'angle $\beta = (\overrightarrow{n}, \overrightarrow{v})$:

$$\cos\beta = \frac{\overrightarrow{n}.\overrightarrow{v}}{||\overrightarrow{n}||.||\overrightarrow{v}||}$$
$$\cos\beta = \frac{1}{||\overrightarrow{n}||}$$

Calculons l'angle $\alpha = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{n})$.

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{u}.\overrightarrow{n}}{||\overrightarrow{u}||.||\overrightarrow{n}||}$$
$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{u}.\overrightarrow{n}}{||\overrightarrow{u}||}\cos\beta$$
$$\cos\alpha = \frac{\frac{a^2}{2f} + f - \frac{a^2}{4f}}{\sqrt{a^2 + (f - \frac{a^2}{4f})^2}}\cos\beta$$
$$\cos\alpha = \frac{\frac{a^2}{4f} + f}{\sqrt{a^2 + f^2 - 2f\frac{a^2}{4f} + (\frac{a^2}{4f})^2}}\cos\beta$$
$$\cos\alpha = \frac{\frac{a^2+4f^2}{4f}}{\sqrt{\frac{a^2}{2} + f^2 + \frac{a^4}{16f^2}}}\cos\beta$$
$$\cos\alpha = \frac{\frac{a^2+4f^2}{4f}}{\sqrt{\frac{8f^2a^2+16f^2f^2+a^4}{16f^2}}}\cos\beta$$
$$\cos\alpha = \frac{\frac{a^2+4f^2}{4f}}{\sqrt{\frac{2(4f^2)(a^2)+(4f^2)^2+(a^2)^2}{16f^2}}}\cos\beta$$
$$\cos\alpha = \frac{\frac{a^2+4f^2}{4f}}{\sqrt{\frac{(a^2+4f^2)^2}{(4f)^2}}}\cos\beta$$
$$\cos\alpha = \frac{\frac{a^2+4f^2}{4f}}{\frac{a^2+4f^2}{4f}}\cos\beta$$
$$\boxed{\cos\alpha = \cos\beta}$$

Par conséquent le miroir parabolique est parfaitement stigmatique sur toute sa surface, c'est à dire que les rayons incidents parallèles à son axe convergent tous vers le foyer F.

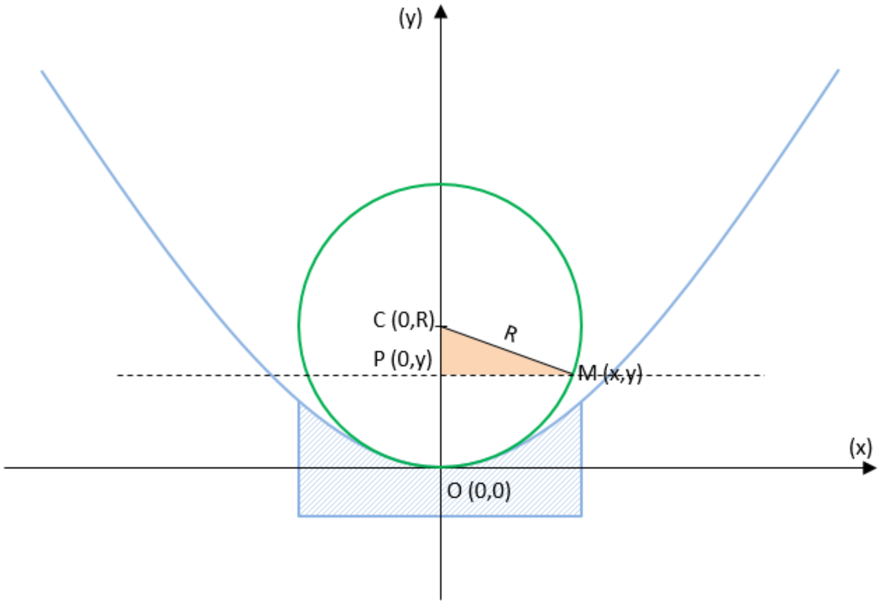
4 Rayon de courbure ROC de la parabole

Le rayon de courbure de la parabole est le rayon ROC du cercle tangent à la parabole au point O. Soit le point M sur le cercle de centre C.

Écrivons le coordonnées paramétriques des points du schéma :

$$P = \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 \\ R \end{bmatrix} \quad M = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

"ROC de la parabole"



Calculons PC, PM et CM :

$$\begin{aligned}
PC &= ||\overrightarrow{PC}|| = \sqrt{(0-0)^2 + (R-y)^2} = R - y \\
PM &= ||\overrightarrow{PM}|| = \sqrt{(x-0)^2 + (y-y)^2} = x \\
CM &= R = ROC
\end{aligned}$$

Considérons le triangle rectangle (PCM), en appliquant le théorème de Pythagore nous obtenons :

$$\begin{aligned}
PC^2 + PM^2 &= CM^2 \\
(R-y)^2 + x^2 &= R^2 \\
R^2 - 2Ry + y^2 + x^2 &= R^2 \quad \text{on a } y \ll x \text{ lorsque M est proche de l'origine O} \\
-2Ry + x^2 &= 0 \\
x^2 &= 2Ry
\end{aligned}$$

Or d'après la définition de l'équation de la parabole 1 on obtient :

$$4fy = 2Ry$$
$$R = 2f$$
$$\boxed{ROC = 2f}$$

La méthode générale pour calculer le ROC d'une courbe quelconque est donnée par la formule suivante :

$$ROC = \frac{\left[1 + (\frac{dx}{dy})^2\right]^{3/2}}{|\frac{d^2x}{dy^2}|}$$

La démonstration : Intmath - Radius of Curvature

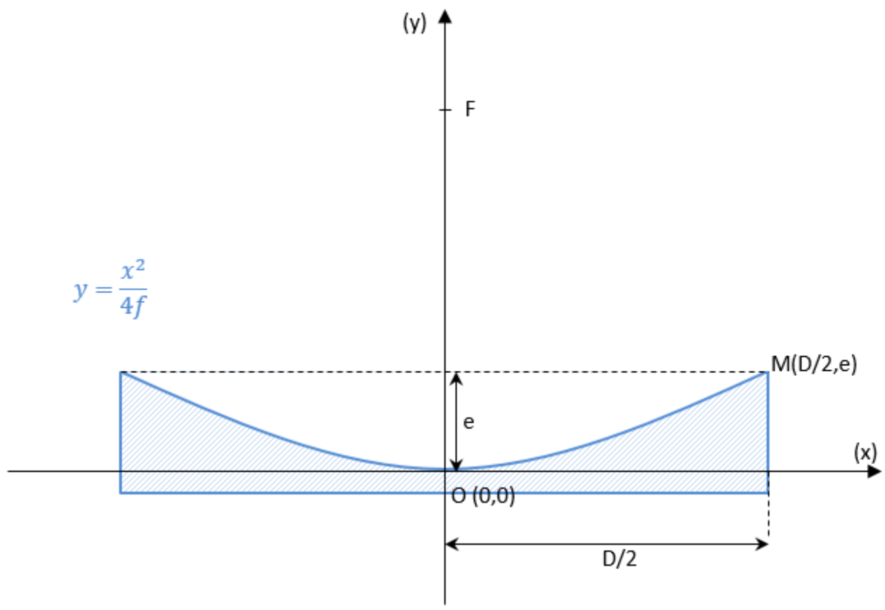
5 Flèche de la parabole

Dans le cas d'un miroir parabolique de diamètre D, la flèche (sagitta) mesure la profondeur e de la parabole.

Soit le point M sur la parabole à son extrémité.

$$M = \begin{bmatrix} D/2 \\ e \end{bmatrix}$$

"Flèche de la parabole"



D'après l'équation de la parabole 1 on en déduit e :

$$e = \frac{(D/2)^2}{4f}$$

$$\boxed{e = \frac{D^2}{16f}}$$